

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

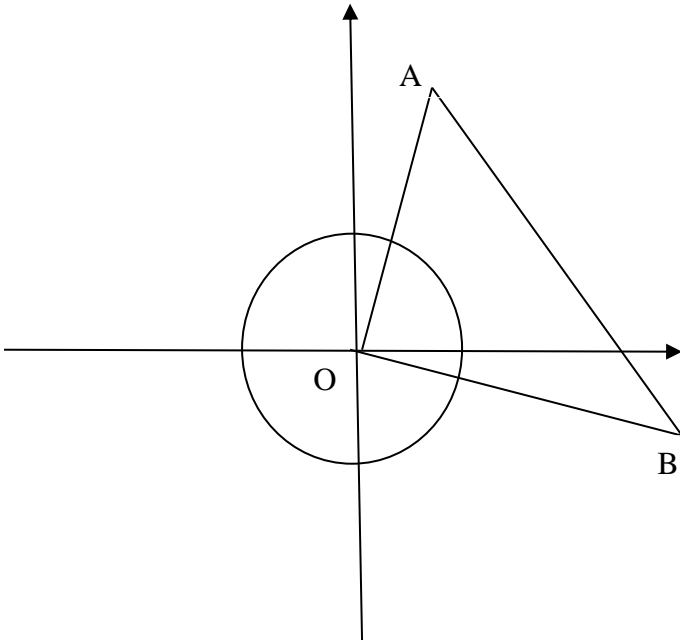
28 februarie 2015

BAREM

CLASA A X-A

(4 ore/săptămână)

1.)	Din oficiu	1p
a)	$A(a,b,c) = \log_{\sqrt{c}} \frac{c^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \log_{\frac{1}{c}} \frac{c}{a+b+2\sqrt{ab}} = \frac{\log_c \frac{c^2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}{\frac{1}{2}} + \frac{\log_c \frac{c}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}}{-1} =$	2p
	$= \log_c \frac{c^4}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \log_c \frac{c}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \log_c c^3 = 3$	2p
b)	$\log_{\sqrt{3}} [9(\sqrt{2}-1)] + \log_{\frac{1}{3}} [3(3-2\sqrt{2})] = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{1+\sqrt{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{3+2\sqrt{2}} = A(1,2,3) = 3$	2p
	Deci avem ecuația $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9}$ echivalentă cu ecuația de gradul doi $x^2 - 3x + 2 = 0$	2p
	Mulțimea soluțiilor este $S = \{1, 2\}$	1p
2.)	Din oficiu	1p
a)	$\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 } = \sqrt{2}, \quad \left \frac{z_1}{z_2} - 1 \right = 1$	2p
	Rezultă că $\frac{z_1}{z_2}$ este afixul intersecției cercului cu centrul în origine și raza $\sqrt{2}$ și a cercului cu centrul în punctul de coordonate (1, 0) și raza 1. Cele două cercuri au două puncte comune $A(1,1)$ și $B(1,-1)$ de unde rezultă că $\frac{z_1}{z_2} \in \{1+i, 1-i\}$.	3p
b)	$E_n = (1+i)^n + (1-i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$	2p
	$E_n = 2(\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$	2p
3.)	Din oficiu	1p
	Scriem relația dată pentru $(n+1)$ și scădem cele două relații obținând $(n+1)f(n+1) = (n+1)^2 f(n+1) - n^2 f(n) \Leftrightarrow n^2 f(n) = n(n+1)f(n+1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \geq 1$	4p
	Scriem aceste relații pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ și le înmulțim $\Rightarrow f(n) = \frac{1}{n} f(1) \Rightarrow f(n) = \frac{2015}{n}$	3p
	Numerele căutate sunt divizorii lui 2015. Deoarece $2015 = 1 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$ $\Rightarrow n \in \{1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015\}$	2p

4.)	Din oficiu	1p
a)	$\Delta = -119 - 120i = (5 - 12i)^2$, $z_1 = 9 - 6i$, $z_2 = 4 + 6i$	2p
	$AB = z_1 - z_2 = 13$, $AO = z_1 = 3\sqrt{13}$, $BO = z_2 = 2\sqrt{13}$.	2p
	Rezultă că $OA^2 + OB^2 = AB^2$ deci triunghiul AOB este dreptunghic cu aria $A_{AOB} = \frac{AO \cdot BO}{2} = 39$	2p
		1p
b)	Deoarece unghiul AOB este unghi drept, rezultă că sectorul circular care acoperă triunghiul este un sfert din discul cu aria 4π , ceea ce reprezintă 32,2..% adică rotunjit la întreg, 32%- din aria triunghiului AOB .	2p